Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures — COEFFICIENT : 4

CONCOURS 1991

Option : Spéciales M, M′, P, P′, T, T′, TA

Chaque candidat doit traiter deux problèmes :

— le problème A et le problème B pour les candidats des options M, M′, P, P′, T′;

— le problème A et le problème C pour les candidats des options T, TA.

Il est demandé aux candidats de faire figurer très lisiblement sur leurs copies la lettre du problème traité et de respecter l'ordre des questions à l'intérieur de chaque problème.

Les correcteurs tiendront compte, dans une large mesure, de la clarté et de la précision des réponses, du soin apporté à la présentation des résultats ainsi que de la **concision** de la rédaction. À titre indicatif, une solution détaillée de chacun des problèmes ne devrait pas dépasser six pages manuscrites.

PROBLÈME A

(Commun à toutes les options)

Les trois parties ne sont pas indépendantes, mais les candidats n'ayant pas réussi à traiter un groupe de questions trouveront dans le cours du problème les résultats indispensables à la poursuite de leur recherche. Seul le résultat 3 est utile à la résolution complète de III.

Notations.

$\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) : ensemble des entiers naturels (resp. des entiers naturels non nuls).

$\mathbb{Z}$: anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels ; $\mathbb{R}_+$: ensemble des réels $\geqslant 0$.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On note $M_n(E)$ l'ensemble des matrices $(n \times n)$ à coefficients dans E et $M_{n,1}(E)$ (resp. $M_{1,n}(E)$) l'ensemble des matrices colonnes (resp. des matrices lignes) à coefficients dans E.

La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Un vecteur colonne X a pour transposée un vecteur ligne ${}^tX$.

I. On appelle racine de l'unité tout nombre complexe λ tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\lambda^n = 1$. Pour $n \geqslant 1$ fixé, les nombres complexes λ tels que $\lambda^n = 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité. On note U_n leur ensemble et on appelle racine primitive n-ième de l'unité tout élément $\alpha \in U_n$ tel que $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\} = U_n$.

a. Déterminer les racines primitives n-ièmes de l'unité pour tous les entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 5$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\alpha_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots, (n-1)$, les racines n-ièmes de l'unité. Montrer que α_k est racine primitive de l'unité si et seulement si k et n sont premiers entre eux.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre premier. On note $p_1, \ldots, p_m$ les racines primitives n-ièmes de l'unité. Démontrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{m} (X - p_k) = 1 + X + \ldots + X^{n-1}.$$

A SUIVRE

II. 1. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $d \in \mathbb{N}^*$. normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est $a_d = 1$). On suppose que les racines complexes $r_1, \ldots, r_d$ de P sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

a. Établir les relations :

$$|a_{d-1}| \leqslant d = C_d^1 : \qquad |a_{d-2}| \leqslant \frac{d(d-1)}{2} = C_d^2.$$

(On pourra exprimer les coefficients à l'aide des racines $r_1, \ldots, r_d$).

b. Plus généralement, montrer que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant d$ il existe un majorant de $|a_k|$ ne dépendant que de k et d.

c. En déduire le résultat 1 : « L'ensemble des polynômes normalisés à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $d \in \mathbb{N}^*$ fixé, dont toutes les racines sont dans le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$, est fini. »

2. Soit $P = \prod_{i=1}^{d} (X - r_i)$ un polynôme normalisé à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et dont les racines r_i vérifient $|r_i| \leqslant 1$. Pour tout entier $k \geqslant 1$ on pose :

$$P_k = \prod_{i=1}^{d} (X - r_i^k) \qquad \text{(on a donc } P = P_1\text{)}.$$

On admettra que les coefficients de P_k sont encore dans $\mathbb{Z}$.

a. Démontrer l'existence de j et k dans $\mathbb{N}^*$, distincts, tels que $P_j = P_k$.

b. En déduire qu'il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, d\}$ telle que, j et k désignant les deux entiers introduits en *a.*,

$$r_1^j = r_{\sigma 1}^k, \ldots, r_d^j = r_{\sigma d}^k.$$

c. Établir, pour $i = 1, \ldots, d$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité :

$$r_i^{j^n} = r_{\sigma^n i}^{k^n}$$

(où $\sigma^n = \sigma \circ \sigma^{n-1}$ si $n \geqslant 1$ et σ^0 est l'identité).

d. Soit i un entier fixé de $\{1, \ldots, d\}$. Justifier l'existence d'un entier $n(i) \leqslant d$ tel que $\sigma^{n(i)}(i) = i$. En déduire l'égalité :

$$(r_i)^{j^{n(i)}} = (r_i)^{k^{n(i)}}.$$

e. En déduire le résultat 2 : « Avec les notations posées en début de question 3, toute racine non nulle de P est une racine de l'unité. »

3. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ un polynôme normalisé à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de degré $d \geqslant 1$. On suppose que toutes les racines de P sont des réels de $]-2, 2[$ et on pose :

$$Q = X^d \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \left(X + \frac{1}{X} \right)^i \right).$$

a. Montrer que Q est un polynôme normalisé à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

b. On note $r_1 = 2\cos\theta_1, \ldots, r_d = 2\cos\theta_d$ les racines de P. Montrer, en considérant les racines de Q, que $\frac{\theta_1}{2\pi}, \ldots, \frac{\theta_d}{2\pi}$ sont des rationnels (résultat 3).

Tournez la page S.V.P.

III. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par E_n l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ le produit scalaire et la norme sont définis respectivement par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \quad \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

En notant X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique, on munit alors l'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ d'une structure euclidienne en posant :

$$(X|Y) = {}^tXY \ , \quad \|X\| = ({}^tXX)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble sp $({}^tMM)$ des valeurs propres de ${}^tMM$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$.

2. Pout tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on pose :

$$|||M||| = \text{Max}\{\sqrt{\lambda} \ ; \quad \lambda \in \text{sp}({}^tMM)\}.$$

   a. Démontrer, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité $\|MX\| \leqslant |||M||| \, \|X\|$.

   b. Prouver l'existence de $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, de norme 1, tel que $|||M||| = \|MX\|$.

3. Démontrer les propriétés suivantes (prouvant que $M \mapsto |||M|||$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$), quels que soient M et N dans $M_n(\mathbb{R})$).

   a. $|||M||| \geqslant 0$ et $(|||M||| = 0 \Leftrightarrow M = 0)$.

   b. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|||\alpha M||| = |\alpha| \, |||M|||$.

   c. $|||M + N||| \leqslant |||M||| + |||N|||$.

   d. $|||MN||| \leqslant |||M||| \, |||N|||$.

4. Déterminer $|||M|||$ lorsque M est la matrice, dans la base orthonormale canonique de $\mathbb{R}^n$,

   a. D'une projection orthogonale ;

   b. D'un endomorphisme orthogonal ;

   c. D'un endomorphisme symétrique.

5. Établir, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'égalité $|||M|||^2 = |||{}^tMM|||$.

6. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, soit $N \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & M \\ {}^tM & 0 \end{pmatrix}$$

7. En calculant $|||N|||^2$, établir l'égalité $|||N||| = |||M|||$ (on note de façon identique la norme dans $M_n(\mathbb{R})$ et dans $M_{2n}(\mathbb{R})$).

8. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que $|||M||| \leqslant 2$. En considérant la matrice N introduite précédemment, montrer qu'il existe un nombre rationnel q tel que $|||M||| = 2\cos(2\pi q)$.

A SUIVRE

PROBLÈME B (Candidats des options M, M', P, P', T')

$\mathscr{C}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

I. *Opération de dérivation discrète.*

On pose Δ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ définie pour tout $g \in \mathscr{C}$ par :

$$\Delta g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x+1) - g(x).$$

1. Montrer que Δ est linéaire et caractériser les éléments de son noyau.

2. On pose $\Delta^0 = I$, où I désigne l'application identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta^1 = \Delta$ et, par récurrence, $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

Montrer que $\Delta^n g(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \, g(x+k)$.

Montrer que $g(x+1) = (I + \Delta) g(x)$ puis que $g(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \Delta^k g(x)$.

II. *Polynôme d'interpolation de Newton.*

Soit $g \in \mathscr{C}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose :

$$P(a+x) = g(a) + x\Delta g(a) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 g(a) + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n g(a).$$

Montrer les propriétés suivantes :

i. degré $(P) \leqslant n$;

ii. $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad P(a+k) = g(a+k)$.

Inversement, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

i. degré $(Q) \leqslant n$;

ii. $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad Q(a+k) = g(a+k)$.

Montrer que $Q = P$.

III. *Formule de Taylor discrète.*

Dans cette partie on prend $a = 0$.

On suppose g de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[0, n]$ et on veut montrer que pour tout x appartenant à $[0, n]$ il existe un réel ζ_x entre 0 et n tel que :

$$g(x) = g(0) + x\Delta g(0) + \frac{x(x-1)}{2}\Delta^2 g(0) + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\Delta^n g(0) + \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\zeta_x)$$

où $g^{(n+1)}$ désigne la dérivée $(n+1)$-ième de g.

a. Montrer le résultat pour x entier, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$;

b. Soit x non entier, $x \in [0, n]$; on définit : $\Phi_x : u \mapsto g(u) - P(u) - \frac{u(u-1)\ldots(u-n)}{(n+1)!} K$

où K est tel que $\Phi_x(x) = 0$.

En utilisant à bon escient le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\zeta_x \in]0, n[$ tel que $\Phi_x^{(n+1)}(\zeta_x) = 0$. Conclure.

c. On pose $R_n(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\zeta_x)$.

Montrer que R_n est une fonction continue sur $[0, n]$, et que :

Tournez la page S.V.P.

$$\int_0^n g(x)\,dx = ng(0) + \sum_{k=1}^{n} \Delta^k g(0) \int_0^n \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}\,dx + \int_0^n R_n(x)\,dx.$$

On pose $M = \sup\{|g^{(n+1)}(x)|\ ;\ x \in [0, n]\}$; montrer que l'on a :

$$\left|\int_0^n R_n(x)\right| \leqslant M \int_0^n \frac{|x(x-1)\dots(x-n)|}{(n+1)!}\,dx \leqslant M.$$

d. Soit f de classe C^{n+1} sur $[0, 1]$ et g_n définie sur $[0, n]$ par $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

On pose $S_n = g_n(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\Delta^k g_n(0) \int_0^n \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}\,dx\right]$.

Montrer que l'on a : $$\int_0^1 f(x)\,dx = S_n + \frac{1}{n}\int_0^n R_n(x)\,dx.$$

e. Soit f de classe C^∞ sur $[0, 1]$: on pose $M_n = \sup\{|f^{(n+1)}(t)|; t \in [0, 1]\}$ et on définit S_n comme en *d.*

Dans le cas particulier où $f(x) = e^x$, donner un majorant de $\left|\frac{1}{n}\int_0^n R_n(x)\,dx\right|$, de limite 0.

Dans le cas général donner une condition suffisante sur M_n pour que S_n tende vers $\int_0^1 f(x)\,dx$ quand n tend vers l'infini.

IV. *Règle de Thomas Simpson* $(n = 2)$.

a. Montrer que pour g de classe C^3 sur $[0, 2]$, on a :

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \frac{1}{3}[g(0) + 4g(1) + g(2)] + R \quad \text{avec } |R| \leqslant \frac{1}{12}\sup\{|g^{(3)}(x)|; x \in [0, 2]\}.$$

b. On veut améliorer la majoration de R en supposant g de classe C^4 sur $[0, 2]$.
Pour ceci, on pose pour $x \in [0, 1]$:

$$\Phi(x) = \int_{1-x}^{1+x} g(t)\,dt - \frac{x}{3}[g(1-x) + 4g(1) + g(1+x)] - Kx^5$$

où K est tel que $\Phi(1) = 0$.

Montrer que Φ est au moins de classe C^3 sur $[0, 1]$ et calculer ses dérivées première, seconde et troisième. En utilisant le théorème de Rolle et celui des accroissements finis, montrer qu'il existe $\xi \in]0, 2[$ tel que :
$K = -\frac{1}{90} g^{(4)}(\xi)$. Quelle formule trouve-t-on en écrivant $\Phi(1) = 0$?

c. Soit f de classe C^4 sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\zeta \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

d. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer $f^{(4)}(x)$ et $M = \sup\{|f^{(4)}(x)|\ ;\ x \in [1, 2]\}$.

En utilisant la formule $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ trouver une valeur approchée de $\ln 2$ en précisant l'erreur.

A SUIVRE

PROBLÈME C (Candidats des options T, TA)

I II III identiques au problème B sauf III e supprimé.
IV remplacé par :

IV. *Règle des trapèzes.*

Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$; on pose :

$$M = \sup \{ |g''(x)| ; x \in [a, b] \}.$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties sur $[a, b]$, montrer que l'on a :

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)\,g''(t)\,dt.$$

2. Calculer $\int_a^b (t-a)(t-b)\,dt$.

3. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b)) - \frac{g''(c)}{12}(b-a)^3.$$

4. Montrer que $\left| \int_a^b g(x)\,dx - (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2} \right| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{12}$.

5. On rappelle que $\text{Arctan } x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ et $\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$.

   a. Donner la valeur approchée de arctan (1/5) et de arctan (1/239) obtenues par application du IV.4. et préciser le majorant de l'erreur.

   b. En déduire une approximation de π en précisant un majorant de l'erreur.

FIN